[文章编号]1000-1832(2016)02-0155-02
[DOI]10.16163/j.cnki.22-1123/n.2016.02.031

·研究简报·

解析函数空间上的有限秩加权复合算子

赵 连 阔
(山西师范大学数学与计算机科学学院,山西 临汾 041004)

[摘　要]　给出了解析函数再生核巴拿赫空间上有限秩加权复合算子的统一刻画. 主要结论表明解析函数再生核巴拿赫空间上的有限秩加权复合算子或者是零算子或者是一秩算子.
[关键词]　解析函数空间;加权复合算子;有限秩
[中图分类号]　O 177.1　　[学科代码]　110·57　　[文献标志码]　A

1　预备知识

设 Ω 是复空间 $\mathbf{C}^N$ 中的域,$H(\Omega)$表示 Ω 上解析函数全体构成的集合. 记 X 为由 Ω 上解析函数构成的具有再生核的巴拿赫空间,且包含所有解析多项式. X 具有再生核是指对任意 $w\in\Omega$,在点 w 的取值泛函有界,即存在 X 上的连续线性泛函 δ_w 使得 $\delta_w(f)=f(w)$,$f\in X$. 熟知的单圆盘上的哈代空间,复平面上的 Fock 空间等都是再生核解析函数巴拿赫空间. 关于再生核函数空间的基本知识参见文献[1-2].

设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N\in H(\Omega)$,$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N)$. 则称 φ 为 Ω 上的解析映射. 特别地,若对任意 $z\in\Omega$,$\varphi(z)\in\Omega$,则称 φ 为 Ω 上的解析自映射.

设 $\psi\in H(\Omega)$,φ 是 Ω 上的解析自映射,定义算子 $C_{\psi,\varphi}:X\to X$ 如下:

$$(C_{\psi,\varphi}f)(z)=\psi(z)f(\varphi(z)),z\in\Omega,f\in X.$$

则称 $C_{\psi,\varphi}$为 X 上的加权复合算子. 加权复合算子是一类非常重要的具体算子,可看作是乘法算子和复合算子的结合,其基本问题是通过定义符号 ψ 和 φ 的函数性质来反映加权复合算子 $C_{\psi,\varphi}$的算子性质,如算子的有界性、紧性、可逆性等. 各类函数空间上的加权复合算子已经得到广泛且深入的研究.[3-7]在函数空间上,加权复合算子与 Toeplitz 算子[8]、积分算子[9]一样重要.

设 T 是巴拿赫空间 A 到巴拿赫空间 B 的有界算子,如果 T 的值域是有限维的,则称 T 为有限秩算子,其值域的维数称为 T 的秩. 众所周知,任何一个有限秩算子都可以表示为若干一秩算子的和,而从 A 到 B 中的一秩算子都可以表示为 $x\otimes f$ 的形式,其中 $0\neq x\in B$,f 是 A 上的非零连续线性泛函,对任意 $y\in A$,$(x\otimes f)(y)=f(y)x$.

2　主要结论

定理 1　设 $\psi\in H(\Omega)$,$\psi\neq 0$,φ 是 Ω 上的解析自映射. 则 $C_{\psi,\varphi}$是 X 上的有限秩算子,当且仅当 $\psi\in X$ 且存在 $b\in\Omega$ 使得 $\varphi(z)=b$. 换句话说,$C_{\psi,\varphi}$是 X 上的非零有限秩算子,当且仅当 $C_{\psi,\varphi}$是 X 上的一秩算子.

证明　因为 φ 是 Ω 上的解析自映射,不妨设 $\varphi(z)=(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_N(z))$,$z\in\mathbf{C}^N$,其中 $\varphi_j(1\leqslant j\leqslant N)$是 Ω 上的解析函数. 对 $1\leqslant j\leqslant N$ 以及非负整数 n,记 $e_j^n(z)=z_j^n$,$z=(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbf{C}^N$,则由 X 的定义,$e_j^n\in X$.

[收稿日期]　2015-10-29
[基金项目]　国家自然科学基金资助项目(11201274,11471189).
[作者简介]　赵连阔(1979—),博士,副教授,主要从事函数空间上的算子理论研究.

若 $C_{\psi,\varphi}$ 是 X 上的有限秩算子,不妨设 $C_{\psi,\varphi}$ 的秩为 m(m 为非负整数). 因为 ψ 非零,所以 $m\geqslant 1$,因此存在 $f_k\in X, F_k\in X^*, 1\leqslant k\leqslant m$,使得 $C_{\psi,\varphi}=\sum_{k=1}^{m} f_k\otimes F_k$,这里 X^* 表示 X 的对偶空间. 对任意 $g\in X$,$(f_k\otimes F_k)(g)=F_k(g)f_k$.

固定 $j(1\leqslant j\leqslant N)$,对任意非负整数 n,令 $a_{n,k}=F_k(e_j^n), 1\leqslant k\leqslant m$,则有 $C_{\psi,\varphi}e_j^n=\sum_{k=1}^{m} a_{n,k}f_k$. 另一方面,$C_{\psi,\varphi}e_j^n=\psi\varphi_j^n$,因此 $\psi\varphi_j^n=\sum_{k=1}^{m} a_{n,k}f_k$.

由 n 的任意性以及线性代数中的基本结论,存在正整数 L 使得 $(a_{L,1},\cdots,a_{L,m})$ 是 $(a_{n,1},\cdots,a_{n,m})(0\leqslant n\leqslant L-1)$ 的线性组合,故存在常数 $c_n(0\leqslant n\leqslant L-1)$ 使得 $\psi\varphi_j^L=\sum_{n=0}^{L-1} c_n\psi\varphi_j^n=\psi\sum_{n=0}^{L-1} c_n\varphi_j^n$. 因为 ψ 非零,$\varphi_j^L=\sum_{n=0}^{L-1} c_n\varphi_j^n$.

令 $p(\lambda)=\lambda^L-\sum_{n=0}^{L-1} c_n\lambda^n, \lambda\in\mathbf{C}$,则存在 $\lambda_l\in\mathbf{C}(0\leqslant l\leqslant L)$ 使得 $p(\lambda)=\prod_{l=0}^{L}(\lambda-\lambda_l), \lambda\in\mathbf{C}$. 从而 $\prod_{l=0}^{L}(\varphi_j-\lambda_l)=0$,这表明存在 $l, 0\leqslant l\leqslant L-1$ 使得 $\varphi_j=\lambda_l$. 为了表达的一致性,不妨设 $\varphi_j=b_j, 1\leqslant j\leqslant N$. 记 $b=(b_1,\cdots,b_N)$,则 $\varphi(z)=b, \forall z\in\mathbf{C}^N$. 因为 φ 是 Ω 上的自映射,$b\in\Omega$,因此 $C_{\psi,\varphi}$ 是 X 上的一致算子 $\psi\otimes\delta_b$.

充分性的证明是显然的.

[参 考 文 献]

[1] ARONSZAJN N. Theory of reproducing kernels[J]. Trans Amer Math Soc,1950,68: 337-404.

[2] RICHTER S. Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions[J]. Trans Amer Math Soc,1987,304: 585-616.

[3] CONTRERAS M D, HERNÁNDEZ-DÍAZ A G. Weighted composition operators in weighted Banach spaces of analytic functions[J]. J Austral Math Soc,2000,69(1):41-60.

[4] MONTES-RODRIGUEZ A. Weighed composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions[J]. J London Math Soc,2000,61:872-884.

[5] LI S,STEVI ĆS. Weighted composition operators from Bergman-type spaces into Bloch spaces[J]. Proc Indian Acad Sci Math Sci,2007,117:371-385.

[6] OHNO S,STROETHOFF K,ZHAO R. Weighted composition operators between Bloch-type spaces[J]. Rocky Mountain J Math,2003,33:191-215.

[7] WOLF E. Weighted composition operators between weighted Bloch type spaces[J]. Bull Soc Roy Sci Liège,2011,80:806-816.

[8] 冯丽霞. Dirichlet 空间上 Toeplitz 算子的乘积[J]. 东北师大学报(自然科学版),2015,47(4):42-45.

[9] 洪勇. 含零阶齐次核的 Hilbert 型奇异重积分算子的有界性及范数[J]. 东北师大学报(自然科学版),2014,46(1):48-54.

Finite rank weighted composition operators on analytic function space

ZHAO Lian-kuo

(School of Mathematics and Computer Science,Shanxi Normal University,Linfen 041004,China)

Abstract: A unified characterization of finite rank weighted composition operators on reproducing kernel Banach space of analytic functions is given. The main result shows that a weighted composition operator on reproducing kernel Banach space of analytic functions is finite rank if and only if it is a zero operator or a rank-one operator.

Keywords: analytic function space; weighted composition operator; finite rank

(责任编辑:李亚军)